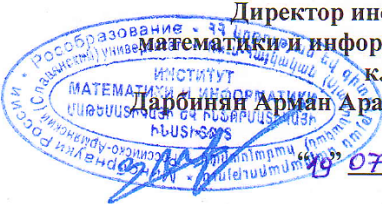


# ГОУ ВПО РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Составлен в соответствии с государственными требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика и Положением «Об УМКД РАУ».

УТВЕРЖДАЮ:

Директор института  
математики и информатики  
к.ф.-м.н.,  
Дарбинян Арман Араикович  
08 07 2023г.



**Институт Математики и информатики**

**Кафедра: Математической кибернетики**

*Автор(ы): к.ф.-м.н., доцент* Петросян Артак Норикович

## **УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС**

**Дисциплина: Б1.В.ДВ.03.01 Специальный курс МК  
«Мартингалы»**

**Направление: «Прикладная математика и информатика» 01.03.02**

**ЕРЕВАН**

## 1. Аннотация

Исследование зависимостей между случайными величинами является одним из ключевых приоритет “Теории вероятностей и математической статистики” вообще, и занимает важное место в общей теории случайных процессов. Для разных классов случайных процессов оно осуществляется разными способами. Выделяются классы величин, для которых основным показателем зависимости является ковариационная функция и все выводы для них полностью определяются свойствами этой функции (к примеру, класс неотрицательно зависимых (nonnegatively-depended или FKG ) величин, стационарные процессы и т.п.). Для классов марковских цепей, марковских процессов основной характеристикой зависимости служит переходная функция, которая полностью определяет эволюцию случайных величин, связанных марковской зависимостью.

В теории мартингалов выделяется достаточно широкий класс случайных величин (мартингалы, семимартингалы), для которых изучение зависимости проводится методами, основанными на исследовании свойств условных математических ожиданий. В современной теории вероятностей мартингалы и их обобщения являются одним из вызывающих все больше интерес предметов исследования. Воистину, в частности мартингальный метод стал одним из востребованных в теории случайных процессов, особенно в вопросах сходимости последовательностей случайных величин в предельных теоремах для сумм случайных слагаемых.

В спецкурсе учебной дисциплины излагаются общая теория мартингалов (семимартингалов) и ряд ее приложений.

Настоящий учебно-методический комплекс устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студентов высших курсов бакалавриата, изучающих данную дисциплину, и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

## 2. Цели и задачи дисциплины

**Целью** данного курса является изучение основ теории мартингалов, строгий вывод основных свойств, ознакомление студентов с практическими приемами использования мартингального метода при изучении предельного поведения преобразованных в мартингалы случайных процессов.

**Задачи курса** – в результате освоения дисциплины формирование у студентов следующих компетенций:

- знания понятий мартингала, субмартингала, супермартингала;
- умения преобразовывать случайные процессы в мартингалы и использовать свойства мартингалов для исследования этих процессов;
- владения аппаратом теории мартингалов для установления, прежде всего, сходимости сумм случайных величин в предельных теоремах и для оценки скорости сходимости в них.

Специальный курс "Мартингалы" разработан для выполнения курсовых работ по дисциплине "Случайные процессы и статистическое моделирование" для студентов направления подготовки "Математика и прикладная математика".

### 3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к вариативной части для направления «Прикладная математика» 01.03.02, является факультативной дисциплиной для студентов высших курсов бакалавриата в дополнение общему курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» как часть «Теории случайных процессов».

Учебно-методический комплекс дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студентов, изучающих данную дисциплину, и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

### 4. Трудоемкость дисциплины и виды учебной работы по учебному плану

Виды учебной работы	Всего, в акад. часах	Распределение по семестрам					
		— сем	— сем	7 сем	— сем.	— сем	— сем.
1	3	4	5	6	7	10	11
<b>1. Общая трудоемкость изучения дисциплины по семестрам, в т. ч.:</b>	72			72			
1.1. Аудиторные занятия, в т. ч.:	36			36			
1.1.1. Лекции							
1.1.2. Практические занятия, в т. ч.	36			36			
1.1.2.1. Обсуждение прикладных проектов							
1.1.2.2. Кейсы							
1.1.2.3. Деловые игры, тренинги							
1.1.2.4. Контрольные работы							
1.1.3. Семинары							
1.1.4. Лабораторные работы							
1.1.5. Другие виды аудиторных занятий							

1.2. Самостоятельная работа, в т. ч.:	36			36			
1.2.1. Подготовка к экзаменам							
1.2.2. Другие виды самостоятельной работы, в т.ч. (можно указать)							
1.2.2.1. Письменные домашние задания							
1.2.2.2. Курсовые работы							
1.2.2.3. Эссе и рефераты							
1.3. Консультации							
1.4. Другие методы и формы занятий **							
Итоговый контроль (Экзамен, Зачет, диф. зачет/указать)	Зачет			Зачет			

## 5. Распределение объема дисциплины по темам и видам учебной работы

Разделы и темы дисциплины	Всего (ак. часов)	Лекции( ак. часов)	Практ. занятия (ак. часов)	Семинары (ак. часов)	Лабор. (ак. часов)	Другие виды занятий (ак. часов)
1	2	3	4	5	6	7
<b>Модуль 1.</b>	<b>36</b>		<b>36</b>			
Тема 1. Условные математические ожидания	4		4			
Тема 2. Последовательности случайных величин, образующие мартингал.	2		2			
Тема 3. Обобщенные мартингалы и родственные понятия.	4		4			
Тема 4. Разложение Дуба.	4		4			
Тема 5. Дискретное и непрерывное время. Моменты остановки. Сохранение свойства мартингалности	4		4			
Тема 6. Основные неравенства.	4		4			
Тема 7. Теоремы сходимости.	4		4			
Тема 8. Равномерно интегрируемые мартингалы.	2		2			
Тема 9. О множествах сходимости.	4		4			
Тема 10. Обратные (reverse) мартингалы.	4		4			
<b>ИТОГО</b>	<b>36</b>		<b>36</b>			

## 6. Содержание

### 6.1. Основные вопросы дисциплины.

Условные математические ожидания: определение, существование и единственность, свойства. Мартингалы: дискретное и непрерывное время. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Определения и основные свойства. Примеры. Разложение Дуба. Моменты остановки. Основные неравенства. Теоремы сходимости. Равномерно интегрируемые мартингалы. Обратные мартингалы.

### 6.2. Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Условные математические ожидания: определение; существование и единственность (теорема Радона-Никодима); свойства условных математических ожиданий.

Тема 2. Последовательности случайных величин, образующие мартингал: определения мартингалов, семимартингалов (субмартингалов, супермартингалов); свойства; примеры.

Тема 3. Обобщенные мартингалы и родственные понятия: определения; теорема об эквивалентности обобщенного мартингала, локального мартингала, мартингального преобразования; мартингал-разностные последовательности, свойства, примеры.

Тема 4. Разложение Дуба: теорема (Дуба) о представлении (разложении) обобщенного мартингала в виде суммы мартингала и предсказуемой возрастающей последовательности (компенсатора); исследование квадратично интегрируемых мартингалов; последовательность квадратических характеристик.

Тема 5. Дискретное и непрерывное время. Моменты остановки. Сохранение свойства мартингальности: марковские моменты; моменты остановки; локализирующая последовательность марковских моментов; теорема о сохранении свойства мартингальности при замене времени на случайный момент; следствия; приложения.

Тема 6. Основные неравенства: неравенство Дуба; неравенство о доминирующей последовательности; неравенства Буркхольдера; неравенства Дэвиса; следствия; примеры.

Тема 7. Теоремы сходимости: теорема Дуба о существовании (с вероятностью единица) предела субмартингала с равномерными ограниченными математическими ожиданиями, следствия; теорема Леви о сходимости (непрерывности) условных математических ожиданий относительно возрастающей системы сигма-алгебр, следствие, применение к мартингалам.

Тема 8. Равномерно интегрируемые мартингалы: определение; свойства; критерий равномерной интегрируемости (необходимое и достаточное условие) для мартингала.

Тема 9. О множествах сходимости: теоремы об установлении, идентификации и спецификации множеств сходимости мартингалов (субмартингалов).

Тема 10. Обратные (reverse) мартингалы: определение; свойства; сходимость; ЗБЧ.

## 7. Распределение весов по модулям и формам контроля

Формы контролей	Веса форм текущих контролей в результирующих оценках текущих контролей			Веса форм промежуточных контролей в оценках промежуточных контролей			Веса оценок промежуточных контролей и результирующих оценок текущих контролей в итоговых оценках промежуточных контролей			Веса итоговых оценок промежуточных контролей в результирующей оценке промежуточных контролей	Веса результирующей оценки промежуточных контролей и оценки итогового контроля в результирующей оценке итогового контроля
	M1 <sup>1</sup>	M2	M3	M1	M2	M3	M1	M2	M3		
Вид учебной работы/контроля	M1 <sup>1</sup>	M2	M3	M1	M2	M3	M1	M2	M3		
Контрольная работа						1					
Тест											
Курсовая работа											
Лабораторные работы											
Письменные домашние задания			1								
Реферат											
Эссе											
<i>Другие формы (Указать)</i>											
<i>Другие формы (Указать)</i>											
Веса результирующих оценок текущих контролей в итоговых оценках промежуточных контролей									0.4		
Веса оценок промежуточных контролей в итоговых оценках промежуточных контролей									0.6		
Вес итоговой оценки 1-го промежуточного контроля в результирующей оценке промежуточных контролей											
Вес итоговой оценки 2-го промежуточного контроля в результирующей оценке промежуточных контролей											

<sup>1</sup> Учебный Модуль

Вес итоговой оценки 3-го промежуточного контроля в результирующей оценке промежуточных контролей										1	
Вес результирующей оценки промежуточных контролей в результирующей оценке итогового контроля											0.4
Экзамен/зачет (оценка итогового контроля)											0.6 (Экзамен/Зачет)
	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$

## 8. Учебно-методическое обеспечение дисциплины.

### 8.1 Основная литература

1. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
2. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
3. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003.
4. Жакод Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: Физматлит, 1994.
5. Мейер П. А. Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.

### 8.2. Дополнительная литература

6. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1977.
7. Ширяев А. Н. Вероятность: В 2-х т. - М.: МЦНМО, 2004.

**Учебная программа одобрена кафедрой Математической кибернетики.**

Зав. кафедрой: Арамян Р.Г



(подпись)